

4. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x, y) = e^x$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

Funkce f nezávisí na proměnné y , proto nás budou zajímat M^y (respektive nás zajímá $\cup_{y \in \mathbb{R}} M^y$). Množina M je elipsou, přičemž x -ová poloosa je 1. Vidíme, že největší M^y je $[-1, 1]$. O funkci e^x víme, že je rostoucí. Z toho dostáváme, že $\max_M f(x, y) = \max_{x \in [-1, 1]} e^x = e$ a $\min_M f(x, y) = \min_{x \in [-1, 1]} e^x = e^{-1}$.

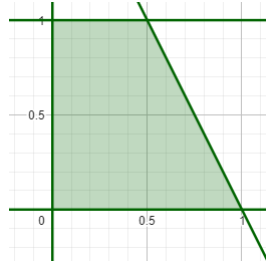
Určíme ještě, kde f svých maxim a minim nabývá v množině M . Maxima nabývá v případě, že $x = 1$. Aby $[1, y] \in M$, musí platit, že $1^2 + 2y^2 \leq 1$, tedy $y^2 \leq 0$, tedy $y = 0$. Proto f nabývá svého maxima na množině M nabývá pouze v bodě $[1, 0]$. Podobně se odvodí, že minima na M nabývá pouze v bodě $[-1, 0]$.

Příklad 1 (b) $f(x, y) = x$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in [0, 2], y \in [0, 1], 2x + y \leq 2\}$

Zřejmě platí, že $M \subset B(0, 3)$, neb maximální hodnota $\sqrt{x^2 + y^2}$ pro $x \in [0, 2], y \in [0, 1]$ je $\sqrt{5} < 3$. Množina M je tedy omezená. Ukážeme ještě, že M je uz. To nám dá, že M je kompaktní, dle věty 12. Dle věty 14 pak budeme vědět, že funkce f na M nabývá extrémů.

$M = [2x + y \leq 2] \cap [x \geq 0] \cap [x \leq 2] \cap [y \geq 0] \cap [y \leq 1]$. Dle věty 11 je M průnikem uz. množin, dle věty 5 jde tedy o uz. mn.

Určíme tedy nyní supremum a infimum f na M a kde svých extrémů na M nabývá. Opět nás zajímají $M^y = \{x \in \mathbb{R}: [x, y] \in M\}$.



Z obrázku vidíme, že $\cup_{y \in \mathbb{R}} M^y = [0, 1]$. Jelikož f je rostoucí v proměnné x dostáváme, že $\max_M f = f(1, y) = 1$, $\min_M f = f(0, y) = 0$.

Zřejmě f nabývá minima v bodech $[0, y], y \in [0, 1]$, a maxima v bodě $[1, 0]$.

Příklad 1 (c) $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$

M je elipsa s poloosami 1, $\frac{1}{2}$, proto $M \subset B(0, 1)$. Navíc je dle věty 11 M uz., tedy dle věty 12 je komp. Dle věty 14 f , jelikož je spojitá, nabývá na M extrémů.

Platí, že $M = [x^2 = 1 - 4y^2, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]]$. Tedy platí

$$\{f(x, y): [x, y] \in M\} = \left\{1 - 4y^2 + y^2: y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\} = \left\{1 - 3y^2: y^2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]\right\}.$$

Dostáváme $\{f(x, y): [x, y] \in M\} = [\frac{1}{4}, 1]$. Pak $\max_M f = 1$, $\min_M f = \frac{1}{4}$. Funkce f nabývá maxima v případě, že $y = 0$, tedy v bodech $[\pm 1, 0]$, a minima v případě, že $y^2 = \frac{1}{4}$, tedy v bodech $[0, \pm \frac{1}{2}]$.

Příklad 1 (d) $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z$ a $M = [-1, 1]^3$

M je krychle a jelikož je M zřejmě kompaktní a f spojitá, tak dle věty 14 f nabývá extrémů na množině M .

Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}\sup_M f &= \sup \{(x+y)^2 + (x-y)^2 + z : x, y, z \in [-1, 1]\} = \\ &= \sup \{2x^2 + 2y^2 : x, y \in [-1, 1]\} + 1 = 5,\end{aligned}$$

$$\inf_M f = \inf \{2x^2 + 2y^2 + z : x, y, z \in [-1, 1]\} = 0 + 0 - 1 = -1.$$

Zřejmě též platí, že f nabývá maxima v bodech $[1, 1, 1]$, $[1, -1, 1]$, $[-1, 1, 1]$, $[-1, -1, 1]$ a minima v bodě $[0, 0, -1]$.

Příklad 1 (e) $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 4x^2 + y^2 = 1\}$

M je elipsa a podobně jako dříve se dá ukázat, že jde o kompaktní množinu a proto f nabývá na M extrémů.

Pomocí věty 16 zjistíme extrémy f na $\text{Int } M$ a porovnejme je s hodnotami na $H(M)$.

Platí: $f'_x(x, y) = 2x + 12y$, $f'_y(x, y) = 4y + 12x$.

Zřejmě parciální derivace existují ve všech bodech $\text{Int } M$. Vyšetřeme, zda jsou někde v $\text{Int } M$ obě nulové.

$$f'_x(x, y) = 0 \iff x = -6y, f'_y(x, y) = 0 \iff x = -\frac{1}{3}y$$

Obě derivace jsou tedy zároveň nulové v případě, že $x = -6y$ a $-6y = -\frac{1}{3}y$, tedy pokud $x = y = 0$. Avšak $[0, 0] \notin M$. Proto f svých extrémů nabývá na $H(M)$.

Jelikož $M = [y^2 = 1 - 4x^2]$, můžeme vyšetřovat maximum a minimum výrazu $f(x, \pm\sqrt{1-4x^2})$ pro x t.j. $0 \leq 1 - 4x^2$ - tj. pro $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$f(x, \pm\sqrt{1-4x^2}) = x^2 \pm 12x\sqrt{1-4x^2} + 2(1-4x^2) = -7x^2 + 2 \pm 12x\sqrt{1-4x^2}$, přičemž $x^2 \in [0, \frac{1}{4}]$. Provedeme-li substituci $a = x^2$, pak hledání extrémů funkce f na intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ přechází na hledání extrému funkce $\tilde{f}(a) = -7a + 2 \pm 12\sqrt{a-4a^2}$ na intervalu $[0, \frac{1}{4}]$.

$$\begin{aligned}\tilde{f}'(a) &= -7 \pm \frac{6(1-8a)}{\sqrt{a-4a^2}} = \frac{-7\sqrt{a-4a^2} \pm 6(1-8a)}{\sqrt{a-4a^2}} \\ \tilde{f}'(a) &= 0 \iff -7\sqrt{a-4a^2} \pm 6(1-8a) = 0\end{aligned}$$

$$-7\sqrt{a-4a^2} \pm 6(1-8a) = 0$$

$$\pm 6(1-8a) = 7\sqrt{a-4a^2}$$

$$36(1-8a)^2 = 49(a-4a^2)$$

$$2500a^2 - 625a + 36 = 0$$

$$a \in \left\{ \frac{4}{25}, \frac{9}{100} \right\}$$

Provedeme-li desubstituci, dostáváme následující body, které jsou podezřelé z maxima: $[x, y] \in \left\{ \left[\pm \frac{2}{5}, \pm \frac{3}{5} \right], \left[\pm \frac{3}{10}, \pm \frac{4}{5} \right] \right\}$.

Dosadíme všechny varianty a vybereme největší a nejmenší hodnoty. Dostáváme, že maxima hodnoty $\frac{17}{4}$ nabývá f v bodech $\left[\frac{3}{10}, \frac{4}{5} \right], \left[-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5} \right]$ a minima hodnoty -2 nabývá f v bodech $\left[\frac{2}{5}, -\frac{3}{5} \right], \left[-\frac{2}{5}, \frac{3}{5} \right]$.

Příklad 1 (f) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$

$$f'_x(x, y) = 2xe^{-(x^2+y^2)} + (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = 2xe^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - y^2)$$

$$f'_y(x, y) = 2ye^{-(x^2+y^2)} (1 - x^2 - y^2)$$

$$f'_x(x, y) = 0 \iff (x = 0 \vee 1 = x^2 + y^2)$$

$$f'_y(x, y) = 0 \iff (y = 0 \vee 1 = x^2 + y^2)$$

Z věty 16 vyplývá, že body podezřelé z extrémů jsou počátek a množina $[x^2 + y^2 = 1]$. $f(0, 0) = 0$ a na $[x^2 + y^2 = 1]$ je f rovna $\frac{1}{e}$.

Jiný způsob:

Provedme substituci $a = x^2 + y^2, a \in [0, \infty)$ a zkoumejme funkci $g(a) = ae^{-a}$.

$$g'(a) = (1 - a)e^{-a}$$

$$g'(a) = 0 \iff a = 1$$

Funkce g je na intervalu $[0, 1]$ rostoucí a na $[1, \infty)$ klesající, přičemž $g(0) = 0, g(1) = \frac{1}{e}, g(a) \rightarrow 0$ pro $a \rightarrow \infty$ a nuly nabývá pouze v $a = 0$. Z toho dostáváme, že funkce g nabývá svého maxima $\frac{1}{e}$ v bodě $a = 1$ a minima 0 v bodě $a = 0$.

Pak funkce f nabývá minima 0 v bodě $[0, 0]$ a maxima $\frac{1}{e}$ v bodech $[x, y]$, které splňují, že $x^2 + y^2 = 1$.

Příklad 1 (g) $f(x, y) = (x + y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$

$$f'_x(x, y) = e^{-2x-3y} - 2(x + y)e^{-2x-3y} = e^{-2x-3y}(1 - 2(x + y))$$

$$f'_y(x, y) = e^{-2x-3y} - 3(x + y)e^{-2x-3y} = e^{-2x-3y}(1 - 3(x + y))$$

$$f'_x = 0 \iff x + y = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = 0 \iff x + y = \frac{1}{3}$$

Dle věty 16 funkce f na množině $\text{Int } M$ nenabývá extrémů.

Zbývá vyšetřit její hodnoty na hranici. $f(x, 0) = xe^{-2x}$ a její derivace zde (tj. na x -ové poloose) nám říká, že extrému se zde nabývá pro $x = \frac{1}{2}$ - a to hodnoty $\frac{1}{2e}$. Podobně f

na y -ové poloose nabývá lokálního extrému $\frac{1}{3e}$ pro $y = \frac{1}{3}$. Zřejmě má funkce f minimum 0 v bodě $[0, 0]$.

Hodnota $\frac{1}{2e}$ je lokálním maximem funkce f na M . Zbývá ukázat, že jde o globální maximum. M . Chceme tedy ukázat, že pro každé $x, y > 0$ platí $\frac{1}{2e} \geq (x + y)e^{-2x-3y}$. Upravme nerovnici.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2e} - (x + y)\frac{1}{e^{2x+3y}} &\geq 0 \\ \frac{e^{2x+3y} - 2(x + y)}{2e^{2x+3y}} &\geq 0 \\ e^{2x+3y-1} - 2(x + y) &\geq 0\end{aligned}$$

Zderivováním funkce $g(x, y) = e^{2x+3y-1} - 2(x + y)$ zjistíme, že poslední uvedená nerovnost platí vždy (viz níže), tedy hodnota $\frac{1}{2e}$ skutečně globálním maximem f na M .

$$\begin{aligned}g'_x(x, y) &= 2(e^{2x+3y-1} - 1) \\ g'_y(x, y) &= 3e^{2x+3y-1} - 2 \\ g'_x = 0 &\iff 2x + 3y - 1 = 0 \\ g'_y = 0 &\iff 2x + 3y - 1 = \ln \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Uvažujme pevně dané $y \geq 0$. V x -ovém směru pak funkce g klesá do $x = \frac{1}{2}(1 - 3y)$, pak roste. Platí $g(\frac{1}{2}(1 - 3y)) = y \geq 0$. Pokud tedy $g(0, y) \geq 0$, pak je $g(x, y) \geq 0$ pro každé $x \geq 0$. Ukažme nyní, že $g(0, y) \geq 0$ pro $y \geq 0$. Pro $y = 0$ je to zřejmé. Funkce g v y -ovém směru klesá do $y = \frac{1}{3}(\ln \frac{2}{3} + 1)$ a pak roste (vidno z g'_y). Platí, že $g(0, \frac{1}{3}(\ln \frac{2}{3} + 1)) = -\frac{2}{3} \ln \frac{2}{3} > 0$. Nejmenší hodnota funkce g na kladné poloose y je tedy kladná, g je proto na kladné poloose y kladná, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 1 (h) $f(x, y) = (x + y)e^{-2x-3y}$ a $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$

Podobně jako v předchozím příkladě dojdeme k tomu, že f nenabývá na M extrémů. Můžeme tedy jen určit supremum a infimum. Stejně jako v předchozím příkladu se ukáže, že $\frac{1}{2e}$ je horní závorou množiny $f(M)$ a 0 dolní závorou.

Ukážeme nyní, že se k hodnotám 0, $\frac{1}{2e}$ lze libovolně přiblížit - z toho plyne, že jde skutečně o infimum a supremum.

Hledáme posloupnost bodů $[x_n, y_n] \in M$ t.ž. $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Víme, že $f(0, 0) = 0$ a že f je spojitá. Stačí tedy volit posloupnost tak, aby konvergovala k 0 a pak ze spojitosti f a Heineho věty dostáváme, že $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Posloupnost lze volit např. takto: $x_n = y_n = \frac{1}{n}$.

Stejnou myšlenkou dostáváme, že stačí najít posloupnost bodů $[x_n, y_n] \in M$ t.ž. konvergující k bodu $[\frac{1}{2}, 0]$. Body lze volit např. takto: $x_n = \frac{1}{2}, y_n = \frac{1}{n}$.

Příklad 1 (i) $f(x, y) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$ a $M = \mathbb{R}^2$

Derivujme funkci f - tím dle věty 16 získáme body podezřelé z extrému.

$$f'_x(x, y) = 2xe^{-(3x^2+y^2)} + (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}(-6x) = e^{-(3x^2+y^2)}(2x - 6x^3 - 30xy^2)$$

$$f'_y(x, y) = e^{-(3x^2+y^2)}(10y - 2yx^2 - 10y^3)$$

$$f'_x = 0 \iff 2x(1 - 3x^2 - 15y^2) = 0 \iff \left(x = 0 \vee x^2 = \frac{1}{3} - 5y^2\right)$$

$$f'_y = 0 \iff 2y(5 - x^2 - 5y^2) = 0 \iff (y = 0 \vee x^2 = 5 - 5y^2)$$

Body podezřelé z extrému jsou $[0, 0]$, $[0, \pm 1]$ a $\left[\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$.

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 1) = f(0, -1) = \frac{5}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) = \frac{1}{3e}$$

Zřejmě pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí, že $f(x, y) \geq 0$. Funkce f tedy nabývá svého minima 0 v bodě $[0, 0]$.

Podobně jako dříve se ukáže, že $\frac{5}{e}$ je globální maximum.